Développements limités

Les quatre parties de ce devoir sont indépendantes.

Deux niveaux de difficulté/longueur :

- Piste bleue : parties **1**, **2** et **3**.
- Piste rouge : parties **3** et **4** (éventuellement tout le devoir).

1 Un équivalent

Déterminer un équivalent simple de $\binom{n}{3}\,\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{n+1}}{n}-\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2 Un prolongement par continuité

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On note f la fonction $x \longmapsto \frac{\ln(1+ax)}{(e^x-1)^2}+\frac{b}{x}$ définie au voisinage de 0.

1) À quelle condition nécessaire et suffisante sur a et b peut-on prolonger f par continuité en 0 ?

2) On suppose que f est prolongeable par continuité en 0 par la valeur $f(0)=0$. Montrer qu'alors f est dérivable en 0 et préciser une équation de sa tangente en 0.

3 Développements limités de la fonction $x \longmapsto \mathrm{Arcsin}^2 x$

On note f la fonction $x \longmapsto \frac{\mathrm{Arcsin}\, x}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1,1[$.

1) Montrer que f est solution sur $]-1,1[$ d'une équation différentielle linéaire simple du premier ordre.

2) **a)** Pourquoi f possède-t-elle un développement limité à tout ordre au voisinage de 0 ?

On note alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite réelle pour laquelle pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$.

b) Calculer a_0 et a_1, puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, a_n$.

c) En déduire une expression explicite de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Calculer enfin un développement limité à tout ordre de la fonction $x \longmapsto \mathrm{Arcsin}^2 x$ au voisinage de 0.

4 Le lemme de Hadamard

1) Soient $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}\big(]-\alpha,\alpha[,\mathbb{R}\big)$ une fonction pour laquelle $f(0)=0$.

On pose $F(0) = f'(0)$ et $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ pour tout $x \in]-\alpha, 0[\cup]0,\alpha[$.

D'après le théorème de Taylor-Young, sachant que $f(0)=0$: $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_1 x + \ldots + a_{n+1} x^{n+1} + o\big(x^{n+1}\big)$ pour certains $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tous $p \in [\![0,n]\!]$ et $x \in]-\alpha,0[\cup]0,\alpha[$: $F^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p\, p!}{x^{p+1}} \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{k!} x^k f^{(k)}(x)$.

b) Montrer que pour tous $p \in [\![0,n]\!]$ et $k \in [\![0,p]\!]$: $x^k f^{(k)}(x) \underset{x\to 0}{=} k! \sum_{i=k}^{p+1} \binom{i}{k} a_i x^i + o\big(x^{p+1}\big)$.

c) En déduire que F est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $]-\alpha,\alpha[$ (*lemme de Hadamard*).

2) Soient $\alpha > 0$ et $f, g \in \mathscr{C}^\infty\big(]-\alpha,\alpha[,\mathbb{R}\big)$. On suppose g ne s'annule pas sur $]-\alpha,0[\cup]0,\alpha[$ et que pour certains $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$ et $i, j \in \mathbb{N}$ pour lesquels $i \geqslant j$: $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \lambda x^i$ et $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \mu x^j$. Montrer que la fonction $\frac{f}{g}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\alpha,\alpha[$ tout entier.